روابط بین نسبتهای مثلثاتی

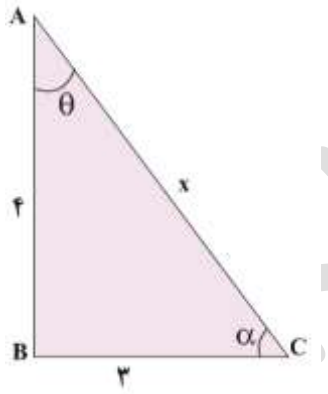
به نام خدا

در جلسه های قبل به طور کامل با نسبتهای مثلثاتی آشنا شدیم، این جلسه میخوایم ارتباط بین این نسبتها رو بررسی کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.

الف اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.



مثلث قائم‌الزاویه‌س، بنابراین از رابطه فیثاغورث داریم:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

وتر رو به دست آوردیم، با استفاده از نسبتهای مثلثاتی که در جلسات قبل یاد گرفتیم داریم:

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$

$\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۳}{۴}$

$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = (\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$sin^2\theta + cos^2\theta = (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

پ درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$(\sin\theta)^۲ + (\cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = (\frac{BC}{AC})^۲ + (\frac{AB}{AC})^۲ = \frac{BC^۲ + AB^۲}{AC^۲} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$

در قسمت ب به صورت عددی یه ارتباط بین سینوس و کسینوس پیدا کردیم و در قسمت پ این ارتباط رو اثبات کردیم. این ارتباط به صورت زیره:

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

این رابطه یه رابطه خیلی ساده و خیلیی پرکاربرده.

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}$

ب) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$

سوالی که اینجا ممکنه برامون پیش بیاد اینه که ما باید علامت مثبت رو برای جواب قبول کنیم یا علامت منفی رو؟

این علامت بستگی به این داره که ما توی کدوم ربع دایره مثلثاتی باشیم.

مثلا گفتیم که در ربع اول سینوس مثبته پس ما علامت مثبت رو در نظر میگیریم. اگه در ربع سوم باشیم، چون می‌دونیم که در این ربع، سینوس منفیه پس علامت منفی رو در نظر می‌گیریم.

رابطه تانژانت بر حسب کسینوس:

میخوایم بین کسینوس و تانژانت یه رابطه پیدا کنیم. رابطه زیر رو که از قبل به دست آوردیم:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

برای همه اینها به مخرج $cos^2\alpha$ میزاریم:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

مقدار $\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}$ که برابر ۱ میشه، چون یه کسره که صورت و مخرجش برابره.

می‌دونیم که $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha$ ، بنابراین:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = tan^2\alpha$$

بنابراین داریم:

$$tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

پس تونستیم ارتباط بین کسینوس و تانژانت رو به دست بیاریم.

$$\Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq 0)$$

@RiaziBaHam

ارتباط بین سینوس و کتانژانت:

مشابه کاری که برای قسمت قبل انجام دادیم اینجا هم انجام میدیم، با این تفاوت که مخرجها رو $sin^2\alpha$ میذاریم:

$$\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

مقدار $\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}$ که برابر ۱ میشه

می‌دونیم که $\frac{cos\alpha}{sin\alpha}=cot\alpha$ ، بنابراین:

$$\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=cot^2\alpha$$

بنابراین داریم:

$$1+cot^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

پس تونستیم ارتباط بین سینوس و کتانژانت رو هم به دست بیاریم:

$$\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq 0)$$

۳ اگر $90^\circ<\alpha<180^\circ$ و $\tan\alpha=\frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

آلفا بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه‌س، یعنی در ربع دوم قرار داره. در جلسه قبل دیدیم که در ربع دوم:

سینوس +

کسینوس −

تانژانت −

کتانژانت −

پس ما علامت نسبتهای مثلثاتی در ربع دوم رو می‌دونیم. از روابطی که در قسمت قبل به دست آوردیم استفاده می‌کنیم تا بقیه نسبتها رو به دست بیاریم.

در اینجا ما تانژانت رو داریم، کدوم نسبت مثلثاتی با تانژانت ارتباط داشت؟ کسینوس چه ارتباطی؟

$$tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

مقداری که برای تانژانت داریم رو جاگذاری می‌کنیم:

$$(-\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\frac{25}{16} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

معکوس می‌کنیم:

$$cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

@RiaziBaHam

بنابراین:

$$cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

دو تا جواب به دست آوردیم، مثبت درسته یا منفی؟ منفی . چرا؟ چون در ربع دوم هستیم و در این ربع، کسینوس منفیه.

$$cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

کسینوس به دست اومد. در ابتدای این جلسه ما ارتباط بین سینوس و کسینوس رو هم به دست آوردیم:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

مقداری که برای کسینوس به دست آوردیم رو جاگذاری می‌کنیم:

$$sin^2\alpha + (-\frac{4}{5})^2 = 1$$

$$sin^2\alpha + \frac{16}{25} = 1$$

$$sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$sin^2\alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \ sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

علامت مثبت درسته یا منفی؟ مثبت. چرا؟ چون در ربع دوم سینوس مثبته.

حالا با استفاده از ارتباط بین سینوس و کتانژانت، مقدار کتانژانت رو به دست میاریم:

@RiaziBaHam

$$1+cot^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$1+cot^2\alpha=\frac{1}{(\frac{3}{5})^2}$$

$$1+cot^2\alpha=\frac{25}{9}$$

$$cot^2\alpha=\frac{25}{9}-1=\frac{25}{9}-\frac{9}{9}=\frac{16}{9}$$

$$cot^2\alpha=\frac{16}{9}\ \rightarrow\ cot\alpha=\pm\frac{4}{3}$$

علات مثبت درسته یا منفی؟ منفی . چرا؟ چون در ربع دوم کتانژانت منفیه.

اتحاد مثلثاتی:

اتحاد مثلثاتی چیه؟

اگه یه تساوی داشته باشیم که طرفین این تساوی نسبتهای مثلثاتی باشه و این تساوی به ازای هر زاویه درست باشه، به اون اتحاد مثلثاتی میگیم.

چطوری ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی ، اتحاد برقراره؟

از یه طرف تساوی شروع می‌کنیم و با استفاده از روابط مثلثاتی که یاد گرفتیم، سعی می‌کنیم که به طرف دوم برسیم ، اگه تونستیم برسیم یعنی اتحاد رو ثابت کردیم.

@RiaziBaHam

آیا تساوی زیر اتحاد است؟

$$1-\frac{\cos^{2}x}{1+\sin x}=\sin x$$

از سمت چپ شروع می‌کنیم. برای اینکه بتونیم منها رو انجام بدیم مخرج مشترک می‌گیریم:

$$1-\frac{cos^2x}{1+sinx}=\frac{1+sinx}{1+sinx}-\frac{cos^2x}{1+sinx}=\frac{1+sinx-cos^2x}{1+sinx}$$

می‌دونیم که:

$$sin^2x+cos^2x=1$$

پس به جای اکه توی صورت داریم میذاریم sin^2x+cos^2x

$$\frac{1+sinx-cos^2x}{1+sinx}=\frac{sin^2x+cos^2x+sinx-cos^2x}{1+sinx}$$

توی صورت یه cos^2x مثبت داریم یه منفی، پس با هم حذف میشن:

$$\frac{sin^2x+\cancel{cos^2x}+sinx-\cancel{cos^2x}}{1+sinx}=\frac{sin^2x+sinx}{1+sinx}$$

از $sinx$ توی صورت فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{sin^2x + sinx}{1 + sinx} = \frac{sinx(sinx + 1)}{1 + sinx}$$

توی صورت و مخرج عبارت $1 + sinx$ رو داریم که با هم ساده می‌کنیم:

$$\frac{sinx(sinx + 1)}{1 + sinx} = sinx$$

ما از سمت چپ تساوی شروع کردیم و تونستیم عبارتی که در سمت راست هست رو به دست آوردیم. بنابراین این عبارت یه اتحاده.

ممکنه اثبات اتحادها در ابتدا براتون سخت باشه ولی نگران نباشید، یه مقدار که به روابط مثلثاتی مسلط بشید میتونید به راحتی این اتحادها رو ثابت کنید.

حل تمرین صفحه ۴۵

روابط بین نسبتهای مثلثاتی

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

@RiaziBaHam

نویسنده : معصومه تدریسی

می‌دونیم:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

بنابراین:

$$sin^2\alpha + (-\frac{3}{5})^2 = 1$$

$$sin^2\alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$sin^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

در ربع دوم علامت سینوس مثبته، بنابراین:

$$sin\alpha = +\frac{4}{5}$$

می‌دونیم که

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

بنابراین:

$$tan\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$cot\alpha = \frac{1}{tan\alpha} = -\frac{3}{4}$$

@RiaziBaHam

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

الف: از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

$$\frac{1}{sin\theta}\times tan\theta=\frac{1}{sin\theta}\times\frac{sin\theta}{cos\theta}=\frac{1}{cos\theta}$$

به سمت راست رسیدیم ☺

ب:

$$\frac{cos\theta}{1+sin\theta}=$$

صورت و مخرج رو در $1-sin\theta$ ضرب می‌کنیم:(در مخرج اتحاد مزدوج داریم)

$$\frac{cos\theta}{1+sin\theta}\times\frac{1-sin\theta}{1-sin\theta}=\frac{cos\theta(1-sin\theta)}{1-sin^2\theta}$$

می‌دونیم:

$$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$$

بنابراین:

@RiaziBaHam

$$cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$$

جاگذاری می‌کنیم:

$$\frac{cos\theta(1-sin\theta)}{1-sin^2\theta} = \frac{cos\theta(1-sin\theta)}{cos^2\theta} = \frac{1-sin\theta}{cos\theta}$$

به سمت راست رسیدیم ☺

پ:

$$\frac{1+tan\alpha}{1+cot\alpha} =$$

به جای تانژانت قرار میدیم : $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

به جای کتانژانت قرار میدیم: $\frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

$$\frac{1+tan\alpha}{1+cot\alpha} = \frac{1+\frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{1+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}} = \frac{\frac{cos\alpha+sin\alpha}{cos\alpha}}{\frac{sin\alpha+cos\alpha}{sin\alpha}} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha$$

به سمت راست رسیدیم ☺

ت:

از سمت چپ شروع می‌کنیم، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$1 - \frac{cos^2x}{1+sinx} = \frac{1+sinx}{1+sinx} - \frac{cos^2x}{1+sinx} = \frac{1+sinx-cos^2x}{1+sinx}$$

می‌دونیم که:

@RiaziBaHam

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

پس به جای اکه توی صورت داریم میذاریم $sin^2x + cos^2x$

$$\frac{1 + sinx - cos^2x}{1 + sinx} = \frac{sin^2x + cos^2x + sinx - cos^2x}{1 + sinx}$$

توی صورت یه cos^2x مثبت داریم یه منفی، پس با هم حذف میشن:

$$\frac{sin^2x + \cancel{cos^2x} + sinx - \cancel{cos^2x}}{1 + sinx} = \frac{sin^2x + sinx}{1 + sinx}$$

از $sinx$ توی صورت فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{sin^2x + sinx}{1 + sinx} = \frac{sinx(sinx + 1)}{1 + sinx}$$

توی صورت و مخرج عبارت $1 + sinx$ رو داریم که با هم ساده می‌کنیم:

$$\frac{sinx\cancel{(sinx + 1)}}{\cancel{1 + sinx}} = sinx$$

به سمت راست رسیدیم ☺

ث :

$$\frac{1}{cosx} - tanx = \frac{1}{cosx} - \frac{sinx}{cosx} = \frac{1 - sinx}{cosx}$$

صورت و مخرج رو در $1 + sinx$ ضرب می‌کنیم:

@RiaziBaHam

$$\frac{1-sinx}{cosx}\times\frac{1+sinx}{1+sinx}=\frac{1-sin^2x}{cosx(1+sinx)}=\frac{cos^2x}{cosx(1+sinx)}$$

یه کسینوس با توان ۲ در صورت داریم و یه کسینوس با توان ۱ در مخرج، ساده می‌کنیم:

$$\frac{cos^2x}{cosx(1+sinx)}=\frac{cosx}{1+sinx}$$

به سمت راست رسیدیم ☺

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam10tr

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات امتحانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.